

## ERWIN SCHRÖDINGER E O PRINCÍPIO DE MACH

A. K. T. ASSIS\*

*Institut für Geschichte der Naturwissenschaften*  
*Universität Hamburg*  
*Bundesstrasse 55*  
*D-20146 Hamburg, Alemanha*  
*assis@ifl.unicamp.br, www.ifl.unicamp.br/~assis*

OSVALDO PESSOA JR.

*Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS)*  
*Inst. de Física, Universidade Federal da Bahia*  
*40210-340, Salvador, BA*  
*opessoa@ufba.br*

**Resumo:** Apresentamos os conceitos de inércia, espaço e tempo na mecânica newtoniana. Analisamos o princípio de Mach, segundo o qual a inércia de qualquer corpo é devida a sua interação com os corpos distantes do universo. Em seguida explicamos porque, em geral, a teoria da gravitação de Einstein não implementa este princípio. Discutimos então o trabalho de Erwin Schrödinger que apresenta uma formulação alternativa para a mecânica baseada numa lei de Weber para a gravitação e que é compatível com as idéias de Mach.

**Palavras-chave:** mecânica clássica; inércia; Princípio de Mach; Schrödinger; massa; gravitação.

**Abstract:** After an overview of the concepts of inertia, space, and time in Newtonian mechanics, we analyze Mach's principle, which states that the inertia of any body arises from its interaction with distant bodies in the Universe. We then explain why, in general, Einstein's theory of gravitation does not implement this principle. A paper by Schrödinger is then discussed, in which he presents an alternative formulation for mechanics based on a form of Weber's law for gravitation, and which is compatible with the ideas of Mach.

---

\* Endereço permanente: Instituto de Física 'Gleb Wataghin', Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, 13083-970, Campinas, São Paulo.

## 1. MECÂNICA NEWTONIANA

Newton apresentou sua formulação da mecânica em 1687 no livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, mais conhecido por seu primeiro nome em latim, *Principia*. A primeira definição que apresenta refere-se ao que hoje é chamado de “massa inercial”:

A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume. [...] é essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. (NEWTON, [1687] 1990, p. 1.)

Depois define o momento linear como o produto da massa inercial pela velocidade do corpo. Sua terceira definição é a de *vis insita*, ou força inata da matéria, ou força de inatividade, ou inércia:

um poder de resistir, através do qual todo o corpo, estando em um determinado estado, mantém esse estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta. (NEWTON, [1687] 1990, p. 1.)

Depois vêm mais quatro definições e em seguida um escólio onde distingue as noções absolutas e relativas de tempo, espaço e movimento. Segundo Newton, os leigos só concebem estas quantidades a partir das relações que elas guardam com os objetos perceptíveis, ou seja, concebem-nas como *grandezas relativas*. Já Newton vai empregar em suas leis do movimento apenas os conceitos absolutos, que ele entende da seguinte forma:

O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa [...]. O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel [...]. Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro. (NEWTON, [1687] 1990, p. 7-8.)

Newton então apresenta o famoso experimento do balde, afirmando que com ele pode-se distinguir o movimento absoluto do relativo pelos efeitos que apresenta. O experimento consiste simplesmente num balde com água, suspenso por uma corda. Quando o balde e a água estão em repouso em relação a Terra, a superfície da água é plana. Quando o balde e a água giram juntos em relação a terra, a superfície da água é côncava (fazendo as contas, levando em conta a ação da força centrífuga no referencial em movimento circular, mostra-se que é um parabolóide de revolução). Segundo Newton, esta concavidade da água no segundo caso só pode ser devida a sua rotação em relação ao espaço absoluto, desvinculado de qualquer matéria distante. Para ele a concavidade não é devida à rotação da água em relação aos corpos do ambiente (balde e Terra), nem mesmo em relação às estrelas distantes.

O ponto de vista de Newton é razoável se levarmos em conta sua lei de gravitação universal e os dois teoremas que provou no *Principia* (Proposições 70 e 71 do Livro I), válidos para uma força central que cai com o inverso do quadrado da distância. Uma casca esférica atrai qualquer corpo externo como se toda a massa da casca estivesse concentrada em seu centro, e não exerce qualquer força resultante sobre um corpo colocado em seu interior, mesmo que este corpo esteja fora do centro da casca. Aplicando estes teoremas no caso do balde, segue-se que a Terra só vai atrair a água para baixo e que o conjunto das estrelas distantes não vai exercer qualquer força resultante sobre a água. Estes resultados são válidos qualquer que seja o movimento da água em relação à Terra ou às estrelas. Portanto, não vai ser a Terra nem o conjunto das estrelas que vai empurrar a água contra as paredes do balde, tornando sua superfície côncava.

## 2. PRINCÍPIO DE MACH

Os pontos de vista de Newton foram criticados por Leibniz (1689), por Berkeley (1710) (ver ASSIS, 1998, p. 105-22) e especialmente por Ernst Mach (1838-1916) em seu famoso livro *A Ciência da Mecânica* (1883). No Prefácio da sétima edição alemã (1912), Mach chamou as concepções de espaço e tempo

absolutos de Newton de “monstruosas”. Ao invés destas “obscuridades metafísicas”, Mach propôs substituir o movimento absoluto de qualquer corpo por seu movimento em relação ao conjunto das estrelas fixas:

Permaneço até o dia de hoje como a única pessoa que insiste em referir a lei da inércia à Terra e, no caso de movimentos de grande extensão espacial e temporal, às estrelas fixas. (MACH, [1883] 1960, p. 336-7.)

Ele também criticou a definição de massa dada por Newton, considerando-a uma “pseudodefinição”:

O conceito de massa não fica mais claro descrevendo a massa como o produto do volume pela densidade, já que a própria densidade denota simplesmente a massa pela unidade de volume. A definição verdadeira de massa só pode ser deduzida das relações dinâmicas dos corpos. (MACH, [1883] 1960, p. 330.)

De acordo com MACH ([1883] 1960, p. 266, 303-4), deve-se escolher arbitrariamente um corpo como tendo massa igual a 1 e então definir a razão das massas entre dois corpos quaisquer como sendo o negativo da razão inversa das acelerações (em relação à Terra ou às estrelas fixas) que um exerce no outro ao interagirem:  $m_1/m_2 = -a_2/a_1$ . Suas críticas à interpretação de Newton do experimento do balde aparecem em diversos lugares de seu livro (como nas p. 279-84). Para Mach, o responsável pela concavidade da água na segunda situação descrita por Newton é a rotação da água em relação às estrelas fixas e não em relação ao espaço absoluto desvinculado de qualquer corpo material. Mach defende essencialmente que só há movimentos e efeitos relativos, ou seja, movimento de matéria em relação à matéria e não movimento de um corpo em relação ao espaço vazio.

Além disto, Mach defende a idéia de que se os movimentos relativos são os mesmos, então os efeitos também têm que ser os mesmos. No experimento do balde, por exemplo, o que se observa é que quando a água está girando em relação ao conjunto das estrelas sua superfície fica côncava. Para Mach (mas

não para Newton) o mesmo aconteceria se mantivéssemos o balde com água parado em relação à Terra e girássemos ao contrário o conjunto das estrelas distantes com a mesma velocidade angular ao redor do eixo do balde. Ou seja, como o movimento relativo entre a água e as estrelas distantes neste último caso é o mesmo que no segundo caso do experimento original de Newton, Mach defende que os efeitos dinâmicos também têm que ser os mesmos (isto é, a água também deve subir pelas paredes do balde neste caso). Na pág. 279, por exemplo, fez o desafio:

Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.

O “princípio de Mach” é então a idéia de que a inércia de qualquer corpo (sua massa ou sua resistência a sofrer acelerações) não é uma propriedade intrínseca dele, mas sim um resultado de sua interação com os corpos distantes do universo. Além disto, as forças inerciais, como a centrífuga e a de Coriolis, passam a ser vistas como forças reais que surgem sempre que o universo distante estiver girando ao redor do corpo de prova. Elas são consideradas como surgindo de uma interação deste corpo com os corpos distantes.

### **3. RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN**

Albert Einstein (1879-1955) formulou sua teoria da relatividade geral de 1916 tendo sido influenciado pelas idéias relacionais de Mach, conforme mencionou em suas “Notas Autobiográficas” (EINSTEIN, [1949] 1982, p. 29, 35) e como exprimiu em carta para o próprio Mach em 1913. A expressão “princípio de Mach” foi cunhada por Einstein em 1918, mas desde 1912 ele a utilizava, quando calculou o aumento da massa inercial de um corpo no interior de uma casca esférica (e sua aceleração induzida pela rotação da casca), referindo-se ao princípio como o da “relatividade da inércia” (PATY, 1993, p. 210-2, 352).

Com a teoria da relatividade geral, Einstein generalizou sua teoria da relatividade restrita impondo que “as leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento”, e não apenas para referenciais inerciais (EINSTEIN, [1916] 1978b, p. 144). Ou seja:

as leis da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral). (EINSTEIN, [1916] 1978b, p. 149.)

Isto significa que ele impôs a igualdade na forma das equações em todos os sistemas de referência.

Esta invariância na forma das equações não tinha sido sugerida por Mach. Apesar disto, em um livro publicado originalmente em 1922, *O Significado da Relatividade*, Einstein apresentou três conseqüências que têm de ser obtidas em qualquer teoria que implemente o princípio de Mach:

Que é que poderá esperar-se do desenvolvimento do pensamento de Mach? 1.º A inércia de um corpo deve aumentar se se acumulam na sua vizinhança massas ponderáveis. 2.º Um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas; a força deve ser do mesmo sentido que a aceleração. 3.º Um corpo em movimento de rotação deve produzir no seu interior um “campo de Coriolis” que faz com que corpos em movimento sejam desviados no sentido da rotação; deve ainda produzir um campo de forças centrífugas radial. (EINSTEIN, [1922] 1958, p. 123.)

Uma quarta conseqüência é que um corpo em um universo vazio não deve ter inércia; ou, toda inércia de qualquer corpo tem que vir de sua interação com outras massas no universo (EINSTEIN, [1917] 1978a, p. 229; REINHARDT, 1973, p. 531).

Inicialmente, em 1916-18, Einstein pensava que estas quatro conseqüências estavam contidas na relatividade geral, e que portanto seria possível

implementar o princípio de Mach em sua teoria. Em meados de 1918, porém, foi obrigado a abandonar a quarta consequência, e assim, aos poucos, foi abandonando o princípio de Mach (HOEFER, 1995, p. 76).

O que ocorreu foi o seguinte. As primeiras soluções obtidas para sua equação de campo gravitacional (como a de Schwarzschild) supunham como condição de contorno que a métrica no infinito era “minkowskiana”, ou seja, idêntica à da relatividade restrita. Isso ia contra o princípio de Mach, pois (i) a métrica local não seria determinada apenas pela distribuição de matéria, mas também por uma condição de contorno, e (ii) se o universo fosse vazio, sua métrica seria toda minkowskiana, mas com isso ter-se-ia um espaço absoluto no qual um corpo de prova teria inércia (mesmo na ausência de outras massas). Para manter o princípio de Mach, Einstein propôs em 1917 o seu famoso modelo cosmológico no qual o universo é fechado (como a superfície de uma esfera), de forma que não há contorno: a métrica (que descreve as propriedades inerciais dos corpos) seria determinada apenas pela distribuição de matéria, e não por condições de contorno. No entanto, para conseguir um universo fechado estático (a expansão do universo não era ainda conhecida), Einstein teve que modificar suas equações, introduzindo uma constante cosmológica. Concluiu assim ter conseguido implementar o princípio de Mach. No entanto, ainda em 1917 o astrônomo holandês Willem de Sitter mostrou que as equações modificadas admitiam uma solução para um universo *vazio*, que correspondia a um universo em expansão! Após passar um ano tentando mostrar que a solução de de Sitter era fisicamente inaceitável (devido a alguma singularidade), Einstein abandonou suas tentativas de implementar rigorosamente o princípio de Mach (SCIAMA, 1953; REINHARDT, 1973, p. 531; PAIS, 1982, seq. 15e; HOEFER, 1995).

Em 1922, quando Einstein listou as três consequências citadas acima, ele ainda mantinha uma simpatia pelo princípio de Mach, apesar de a teoria da relatividade geral não ser perfeitamente machiana. Após a sua morte, porém, BRANS (1962) mostrou claramente que a primeira consequência não aparece na relatividade geral, tendo Einstein interpretado erroneamente um cálculo efetuado em um sistema de coordenadas especial. Ou seja, assim como

acontecia com a lei de Newton da gravitação, também na relatividade geral um conjunto de cascas esféricas em repouso em relação a um certo referencial  $S$  não exerce influência resultante nenhuma sobre um corpo em seu interior, não importando o movimento ou localização deste corpo de prova em relação a  $S$ . As propriedades inerciais deste corpo não dependeriam da massa da distribuição esfericamente simétrica das estrelas fixas.

Este resultado pode servir de argumento contra a realidade do princípio de Mach (ou contra a validade da teoria da relatividade geral), mas ele é muito difícil de testar no laboratório. Existe porém um experimento factível para testar se a anisotropia da distribuição de massas ao redor da Terra gera uma anisotropia da inércia. A anisotropia de massa devida ao fato de estarmos fora do centro de nossa galáxia foi estimado como sendo da ordem de  $\Delta m/m \approx 10^{-10}$ , no entanto experimentos de anisotropia de inércia realizados com técnicas de ressonância magnética por Hughes (1960) & Drever (1961) impuseram um limite de  $\Delta m/m < 10^{-22}$  (WILL, 1993). À primeira vista este resultado indica que o princípio de Mach é falso, mas se a anisotropia inercial afetar igualmente todas as partículas e campos, então ela também afetará os próprios instrumentos de medição, não permitindo uma observação local dos efeitos do princípio de Mach, conforme sugerido por S.T. Epstein (1960) e Dicke (1964) (ver REINHARDT, 1973, p. 536).

A segunda consequência apresentada por Einstein, por sua vez, ocorre na relatividade geral, podendo ser interpretada de diferentes maneiras (REINHARDT, 1973, p. 531). A terceira consequência também ocorre na relatividade geral, como foi mostrado por Thirring em 1918 e 1921, embora não da forma exata como deveria, segundo o princípio de Mach (MASHHOON *et al.*, 1984, p. 721-5). Isto é, enquanto na mecânica clássica as forças centrífuga e de Coriolis são dadas por  $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  e  $2m\vec{\omega} \times \vec{v}$  ( $m$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  sendo a massa, vetor posição e velocidade do corpo de prova e  $\vec{\omega}$  sendo a velocidade angular do sistema de referência em relação a um sistema de referência inercial), na relatividade geral os termos equivalentes obtidos por Thirring, supondo uma métrica minkowskiana plana no infinito, são:



$$m\vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \vec{r}) + 10m\vec{v} \times \vec{\omega}_S + 2m(\vec{\omega}_S \cdot \vec{r})\vec{\omega}_S . \quad (1)$$

Esta é a expressão da força exercida por uma casca esférica (de massa  $M$  e raio  $R$  girando com velocidade angular  $\vec{\omega}_S$ ) sobre uma partícula de massa  $m$  em seu interior (a menos de um fator multiplicativo geral dado por  $4GM/15Rr^2$ ). Ou seja, há termos tipo centrífugo e de Coriolis, mas o termo de Coriolis neste resultado da relatividade geral é 5 vezes maior do que o equivalente da mecânica clássica (assumindo que o termo centrífugo tenha o mesmo valor nas duas teorias). Além disto, neste cálculo da relatividade geral surgiu um termo espúrio adicional, a força axial  $2m(\vec{\omega}_S \cdot \vec{r})\vec{\omega}_S$ , que não tem análogo em nenhuma força fictícia. Este termo implica que, para a relatividade geral (supondo as condições de contorno mencionadas), há uma diferença observacional entre um corpo parado no centro de uma casca esférica girante e um corpo girante no centro de uma casca parada, o que contraria as idéias relacionais de Mach.

Pelos motivos expostos nos parágrafos anteriores, passou a haver na década de 20 um consenso geral, aceito inclusive por Einstein, de que a relatividade geral não consegue implementar completamente o princípio de Mach (ver também GHINS, 1991, p. 247-93).

Devemos salientar, no entanto, que há propostas como a de Wheeler (1964) de se utilizar o princípio de Mach na relatividade geral para *selecionar* condições iniciais, de contorno ou de simetria apropriadas para o Universo. Nesta linha, por exemplo, Hönll & Dehnen (1962) estudaram quais condições de contorno permitem que o cálculo relativístico de Thirring, mencionado acima, satisfaça o princípio de Mach, ou seja, forneça o mesmo resultado quer o corpo esteja girando em relação a uma casca parada, quer o corpo esteja em repouso em relação à casca girante (ver REINHARDT, 1973, p. 531-4).

#### 4. ERWIN SCHRÖDINGER

Erwin Schrödinger (1887-1961) também foi influenciado pelas idéias de Mach. Por exemplo, numa carta a Eddington em 1940 afirmou:

Nasci e fui educado em Viena com os ensinamentos e a personalidade de E. Mach ainda ocupando a atmosfera. Devotei-me a seus escritos dos quais li praticamente todos [...], talvez por volta da mesma época em que fomos iniciados na teoria da relatividade restrita (*apud* MEHRA & RECHENBERG, 1987, p. 108).

Além da teoria da relatividade restrita de Einstein, Schrödinger também estudou bastante a relatividade geral desde 1916, quando ainda estava na frente de batalha perto de Trieste. A nova teoria relativística da gravitação já cativara a atenção dos físicos vienenses desde 1913, quando Einstein previra a deflexão da luz por campos gravitacionais no 85<sup>o</sup> *Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte* (a SBPC alemã), realizado na capital do Império Austro-Húngaro. Em meados de 1917, Schrödinger retornou para a Universidade de Viena, onde encontrou seus colegas Ludwig Flamm e Hans Thirring já trabalhando na relatividade geral (mencionamos o trabalho de Thirring na seção anterior). No final do ano redigiu dois pequenos artigos sobre o assunto, que foram publicados em 1918 no *Physikalische Zeitschrift*. Nesta época ele também desenvolveu uma abordagem sistemática à mecânica baseada no cálculo tensorial da relatividade geral, compondo três cadernos de anotações (não publicados), que incluíam citações do recém-lançado livro *Espaço, Tempo e Matéria*, de Hermann Weyl (1918). Redigiu também um manuscrito que acabou não publicando, “Mecânica hertziana e a teoria da gravitação einsteiniana”, comparando estas duas teorias, que têm em comum justamente a ausência de forças (MEHRA & RECHENBERG, 1987, p. 106, 172-3, 216-22; MOORE, 1989, p. 95, 105-7).

Em uma das publicações mencionadas acima, Schrödinger subscrevia claramente à idéia de Mach de que na relatividade geral

o conceito de massa é *relativo*, isto é, determinado apenas pelas *inter-relações* entre os corpos (SCHRÖDINGER, 1918; *apud* MEHRA & RECHENBERG, 1987, p. 219).

Vemos assim que, por esta época, Schrödinger compartilhava as esperanças de Einstein de que a relatividade geral implementaria o princípio de Mach.

Em meio ao caos econômico do pós-guerra, em 1918, Schrödinger passou a se interessar pela teoria quântica, considerando seriamente a hipótese do quantum de luz de Einstein. Fazia também pesquisa sobre a métrica das cores, que requeria uma geometria riemanniana. Em 1920 foi trabalhar em Jena, depois Stuttgart e Breslau. Por fim, em outubro de 1921, estabeleceu-se na tranqüila Zurique, onde trabalhavam dois grandes físicos cujas obras eram conhecidas de Schrödinger: Peter Debye e Hermann Weyl.

O interesse de Schrödinger pela teoria da relatividade parece ter sido redespertado pelo famoso artigo de revisão escrito em 1921 pelo jovem vienense Wolfgang Pauli, que lhe enviou uma cópia do artigo. Mencionamos na seção anterior que, após 1918, começou a ficar claro para a comunidade dos físicos trabalhando com a relatividade geral que esta teoria não implementava de maneira completa o princípio de Mach. Este consenso, porém, demorou alguns anos para se firmar, como se pode depreender do artigo de Pauli (1958, p. 182), que concluiu que “este ponto ainda não foi completamente resolvido”, já que tanto Einstein quanto Weyl publicaram críticas à solução de de Sitter. Não sabemos ao certo qual era a opinião de Schrödinger sobre o assunto no início da década de 20, mas veremos como em 1925 ele exprimiu uma esperança de que a relatividade geral pudesse implementar o princípio de Mach.

No início de 1922 Schrödinger teve tempo de se aprofundar nas partes mais difíceis do artigo de Pauli, inclusive na recente tentativa de Weyl de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Nas várias edições do *Espaço, Tempo e Matéria*, Weyl discutira como sua teoria descreveria o movimento de um elétron no átomo de hidrogênio, apontando uma lacuna entre sua descrição e a descrição dada pela teoria quântica de Bohr-Sommerfeld. Examinando este problema, Schrödinger encontrou uma maneira de ligar as duas descrições, fato este que considerou “notável” em um artigo publicado em 1922, e que mais tarde seria considerado uma antecipação da mecânica ondulatória (MEHRA & RECHENBERG, 1987, p. 312-8; RAMAN & FORMAN, 1969).

Nesse período, Schrödinger não interagiu muito com outros cientistas, com exceção de Weyl, com quem mantinha reuniões semanais para discutir problemas matemáticos (WESSELS, 1979, p. 311). Em março de 1924, Weyl publicou um artigo de revisão sobre o princípio de Mach, na forma de um diálogo entre São Pedro, que achava que a relatividade geral marcara o triunfo deste princípio, e São Paulo, que explicava por que este princípio não era implementado pela relatividade geral. Neste diálogo, São Paulo sublinhava a existência de soluções para o universo vazio (WEYL, 1924, p. 201-3) e a discrepância entre o princípio de Mach e o resultado de Thirring (p. 200).

É bastante plausível supor que por essa época Schrödinger discutiu este assunto com Weyl. O vienense continuava trabalhando intensamente com a teoria quântica, em especial a estatística quântica de gases ideais. Mas em algum momento teve a idéia de implementar o princípio de Mach através de uma modificação da expressão para a energia cinética dos corpos.

Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a energia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de *interação* das duas massas, e, assim sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas. De todas as possíveis expressões para essa energia, escolhemos heurísticamente a que satisfaz às seguintes exigências: 1. A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o potencial de Newton; 2. Deve ser proporcional ao quadrado da taxa de variação da distância (SCHRÖDINGER, [1925] 1994, p. 5-6).

Propôs assim uma energia potencial de interação gravitacional entre dois corpos que consistia do potencial usual somado à expressão relacional para a energia cinética:

$$W = -\frac{\mu\mu'}{r}(1-\gamma\dot{r}^2) . \quad (2)$$

Aqui  $r$  é a distância entre as massas  $\mu$  e  $\mu'$  (escolhidas de tal forma que a constante gravitacional seja igual a 1),  $\dot{r} = dr/dt$  e  $\gamma$  é uma constante com as dimensões de  $s^2/m^2$ . Ao integrar esta expressão para uma partícula de massa  $\mu$  movendo-se com velocidade  $v$  no interior de uma casca esférica com densidade superficial de massa  $\sigma$  uniforme e raio  $R$ , encontrou para a parte dependente da velocidade:

$$W = \frac{4\pi\gamma\mu\sigma R}{3} v^2 . \quad (3)$$

Schrödinger identificou este resultado (após a integração para todo o universo conhecido) com a energia cinética clássica do corpo,  $mv^2/2$ , com isto obtendo a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais. Aqui  $m$  é a massa da partícula relacionada com  $\mu$  e com a constante gravitacional  $G$  por:  $m = 8\pi\gamma\mu\sigma R/3 = \mu/\sqrt{G}$ .

Em seguida, considerou o problema do sol interagindo com um planeta, sendo que ambos interagem também com o universo distante através da expressão acima. Com isto, obteve a precessão do periélio do planeta, e para que isto coincidissem com o valor medido pelos astrônomos para Mercúrio, encontrou  $\gamma = 3/c^2$  onde  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s é a velocidade da luz. Desta forma, obteve também uma igualdade algébrica com a expressão do avanço do periélio obtida na relatividade geral, mas a partir de conceitos e equações de órbita totalmente distintos. Por último tratou ainda do problema de corpos movendo-se a velocidades próximas a da luz, obtendo uma expressão para a energia cinética semelhante à da relatividade geral, novamente com interpretações bem distintas.

Este é um artigo bastante importante mas que ficou esquecido por muito tempo. Pode-se afirmar que ele voltou a chamar a atenção das pessoas quando foi republicado nas obras completas de SCHRÖDINGER (1984). Depois disto, ele foi mencionado em um artigo de MEHRA (1987) e em MEHRA & RECHENBERG (1987, p. 372-3, 459). Julian Barbour foi informado sobre ele por

Domenico Giulini em 1993, passando a referência a um de nós (A.K.T.A.) no mesmo ano. Ele então foi traduzido para o português (XAVIER & ASSIS, 1994) e para o inglês (SCHRÖDINGER, 1995). Artigos discutindo ou utilizando aspectos de seu trabalho foram publicados em ASSIS (1994, seq. 7.5 a 7.7; 1995a, seq. 5.2; 1995b), CALUZI & ASSIS (1995) e ASSIS & GRANEAU (1996).

## 5. MOTIVAÇÕES E PRECURSORES DE SCHRÖDINGER

Como Schrödinger encarava sua proposta, em face dos sucessos da teoria da relatividade geral? No início de seu artigo de 1925 mencionado acima, ele sublinhou que também a teoria da relatividade geral, em sua forma original (devida a Einstein em 1916) não podia ainda satisfazer o princípio de Mach (vimos que isto já tinha se tornado um consenso).

Ao escrever isso com relação à “forma original” da teoria, Schrödinger deixou entrever sua esperança de que o princípio de Mach pudesse ser implementado em um modelo cosmológico adequado.

Não duvido que, quando a solução [ao problema das condições de contorno adequadas] for finalmente encontrada [...], ela não só será plenamente satisfatória, mas poderá também ser colocada em uma forma que possibilite uma compreensão verdadeira para um público mais amplo. Porém, do ponto de vista atual, talvez seja interessante perguntar se o princípio de Mach não poderia ser satisfeito – tornando compreensível a determinação dos sistemas inerciais pela esfera das estrelas fixas – de uma maneira simples através de uma modificação da mecânica clássica (SCHRÖDINGER [1925] 1995, p. 148).

Schrödinger parecia estar dizendo que acreditava numa posterior derivação do princípio de Mach pela cosmologia relativista, mas como isso ainda era muito complicado para a época, então ele iria apresentar uma derivação simples obtida a partir de uma modificação da mecânica clássica. Mas, na sua visão, qual era o estatuto desta teoria semi-clássica?

A objeção mais séria contra sua teoria, segundo Schrödinger, era que ela supunha o princípio de ação instantânea. Como ele aceitava que a gravitação se propaga à velocidade da luz, considerou que sua teoria seria uma formulação aproximada na qual não faria diferença, na média, se o que era utilizado era a propagação retardada dos efeitos gravitacionais ou a instantânea.

Acredito ser provável que através de posteriores desenvolvimentos dessas idéias chegar-se-á finalmente, após certas modificações, à teoria da relatividade geral. Pois esta representa um quadro que dificilmente poderá ser completamente derrubado por qualquer teoria futura, mas hoje ainda não está completamente preenchido com concepções concretas e ricas. Considero a concepção usada aqui – que a mudança do estado relativo, não absoluto, de movimento dos corpos requer a realização de trabalho – como sendo pelo menos um estágio intermediário permissível e útil, que torna possível compreender, de maneira simples mas ao mesmo tempo sensata, uma situação empírica simples através de concepções que são familiares a todos. (SCHRÖDINGER [1925] 1995, p. 156).

Da forma como a mecânica relacional é apresentada hoje, como por exemplo em ASSIS (1989, 1995b, 1998), ela é inconsistente com a relatividade geral, e experimentos cruciais em um futuro próximo deverão falsear uma dessas teorias. A história da ciência, porém, nos mostra que teorias falseadas geralmente podem ser modificadas de forma a conseguirem sobreviver aos experimentos cruciais. Assim, talvez no futuro esses dois programas de pesquisa acabem se transformando em duas “interpretações” diferentes da teoria da gravitação. Isto seria consistente com a esperança de Schrödinger de que a relatividade geral pudesse vir a ser derivada a partir das idéias relacionais (após certas modificações). Da mesma forma que a mecânica corpuscular newtoniana tem uma versão para campos devida a Poisson, a teoria de campo einsteiniano poderia ter na mecânica relacional uma versão corpuscular (comparar com REINHARDT, 1973, p. 533).

Em suma, as citações de Schrödinger que apresentamos acima já permitem explicar porque ele escreveu seu artigo de 1925. Tudo indica que por

volta desta época ele ainda acreditava na validade do princípio de Mach, apesar de reconhecer que a relatividade geral ainda não implementava este princípio de maneira satisfatória. Em um certo momento, estimulado por suas discussões com Weyl e pensando no princípio de Mach, ele teve a idéia de exprimir a energia cinética de maneira relacional. A idéia se mostrou fecunda e seu belo artigo foi redigido.

Mas como ele chegou a esta idéia? Foi um ato isolado de um gênio, uma idéia (como o quantum de luz de Einstein) que se não tivesse saído de sua mente, demoraria décadas para ser descoberta? Não. Na verdade era uma idéia bastante plausível, que já havia sido publicada por dois cientistas antes dele, o vienense Wenzel Hofmann (1904) e o berlinense Hans Reissner (1914-15).

Na citação que transcrevemos na seção 4, Schrödinger afirma que chegou à eq. (2) “heurísticamente”, ou seja, por tentativa e erro guiados pela intuição. Não cita ninguém que houvesse proposto a lei antes dele. Mas quando foram publicadas suas obras completas, foi incluída logo depois deste artigo uma nota assinada por Schrödinger, onde pede desculpas por ter “plagiado involuntariamente” as idéias de Reissner (SCHRÖDINGER, 1984, p. 192; traduzido em XAVIER & ASSIS, 1997). Reissner havia publicado em 1914 um artigo onde propunha generalizar a lei de Newton, incluindo um termo do tipo  $m_1 m_2 f(r) \dot{r}^2$ , onde  $f(r)$  é uma função da distância entre as duas massas (REISSNER, 1914), que era exatamente a expressão proposta por HOFMAN (1904). Em 1915, Reissner publicou um outro artigo onde propunha explicitamente  $f(r) = 1/r$ , de tal forma que sua expressão ficava essencialmente idêntica à eq. (2) (REISSNER, 1915). Em sua nota, Schrödinger afirma que ao escrever seu artigo de 1925, com certeza tinha conhecimento do artigo de Reissner de 1914, mas não tinha certeza sobre o de 1915.

Podemos concluir portanto que a idéia de tratar a energia cinética de maneira relacional chegou a Schrödinger através de Reissner, mas que o vienense por alguma razão não achou importante citar Reissner, ou simplesmente esqueceu dos artigos deste. Schrödinger chega a afirmar em sua nota que a eq. (2) seria “propriedade intelectual de Prof. H. Reissner, e não minha”. Vale porém lembrar



que Wilhelm Weber já havia apresentado uma expressão análoga para o eletromagnetismo 70 anos antes (WEBER, 1846, 1848). A mesma lei para a força da gravitação havia sido proposta desde a década de 1870 por Weber e Zöllner, por Holzmüller, por Tisserand e por Gerber (ver ASSIS, 1994, seq. 7.5; ASSIS, 1998, seções 11.3 e 11.4), sem porém explorar as implicações para a energia cinética, como fizeram Hofman, Reissner e Schrödinger.

Schrödinger não deu continuidade a seu artigo. Quais seriam os motivos? Uma primeira razão para isto é que este foi um de seus últimos artigos antes de desenvolver a mecânica quântica ondulatória, que o absorveria por completo a partir do final de 1925. Um segundo motivo poderia estar relacionado com a situação embaraçosa em que ele ficou por não ter reconhecido o precedente de Reissner. Em terceiro lugar, Schrödinger nunca abandonou sua crença na validade da relatividade geral, com a qual trabalhara em 1917-18. Mais tarde voltaria a trabalhar com ela, buscando uma teoria unificada baseada em trabalhos de Einstein. Escreveria até dois livros sobre relatividade geral: *Space-Time Structure* (1950) e *Expanding Universes* (1957) (HITTMAN, 1987).

O enfoque do artigo de 1925 voltou a ser considerado a partir década de 1970 por diversos autores, que embora não conhecessem o trabalho de 1925 de Schrödinger, buscaram suas inspirações nas obras originais de Wilhelm Weber e de Ernst Mach. A principal motivação para se trabalhar ao longo desta linha de pesquisa é o grande poder explicativo e computacional da lei de força de Weber, e o fato de ela ser totalmente compatível com o princípio de Mach. Para referências detalhadas e diversas discussões ver ASSIS (1989; 1994, seq. 7.5 a 7.7; 1998).

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apresentado por André Assis no *X Colóquio de História da Ciência* do CLE, realizado em Campos do Jordão em setembro de 1997. Agradecemos a A. L. Xavier Jr. e a J. Schleicher por sugestões e idéias relativas a este trabalho, a M. Novello e a um parecerista anônimo pela leitura crítica. Um dos autores (AKTA) agradece ainda à Fundação Alexander von Humboldt

da Alemanha pela concessão de uma bolsa pesquisa durante a qual este trabalho foi concluído.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSIS, A.K.T. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, v. 2, 1989, p. 301-18.
- . *Weber's Electrodynamics*. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- . *Eletrodinâmica de Weber - Teoria, Aplicações e Exercícios*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995a.
- . Weber's law and Mach's principle. In BARBOUR, J.B. & PFISTER, H. (orgs.), *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Boston: Birkhäuser, 1995b, p. 159-71.
- . *Mecânica Relacional*. Coleção CLE, v. 22. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, 1998.
- ASSIS, A.K.T. & GRANEAU, P. Nonlocal forces of inertia in cosmology. *Foundations of Physics*, v. 26, 1996, p. 271-83.
- BRANS, C.H. Mach's principle and the locally gravitational constant in general relativity. *Physical Review*, v. 125, 1962, p. 388-96.
- CALUZI, J.J. & ASSIS, A.K.T. Schrödinger's potential energy and Weber's electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, v. 27, 1995, p. 429-37.
- EINSTEIN, A. *The Meaning of Relativity: Four lectures delivered at Princeton University, May, 1921*. Trad. de Edwin P. Adams. Princeton: Princeton University Press, 1922. Londres: Methuen, 1922. Edição alemã, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*. Braunschweig: Vieweg, 1922. Tradução para o português da 5ª edição em inglês, *O Significado da Relatividade*. Trad. de M. Silva. Coimbra: Arménio Amado, 1958.
- . Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1917, p. 349-56.

- Tradução para o português: Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral. In: EINSTEIN, A., LORENTZ, H., WEYL, H. & MINKOWSKI, H., *O Princípio da Relatividade*. 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1978a, p. 225-41.
- . Die Grundage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, v. 49, 1916, p. 769-822. Tradução para o português: Os fundamentos da teoria da relatividade geral. In: EINSTEIN, A., LORENTZ, H., WEYL, H. & MINKOWSKI, H., *O Princípio da Relatividade*. 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1978b, p. 141-214.
- . Autobiographical notes. In: Schilpp, P.A. (org.). *Albert Einstein, philosopher-scientist*. Urbana: Open Court, 1949, p. 1-95. Tradução para o português: *Notas Autobiográficas*. 3ª ed. Trad. de A.S. Rodrigues. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.
- GHINS, M. *A Inércia e o Espaço-Tempo Absoluto*. Coleção CLE, v. 9. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, 1991.
- HITTMAYER, O. Schrödinger's unified theory seen 40 years later. In: KILMISTER, C.W. (org.). *Schrödinger - Centenary Celebration of a Polymath*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987, p. 165-75.
- HOEFER, C. Einstein's Formulations of Mach's principle. In: BARBOUR, J.B. & PFISTER, H. (orgs.). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Einstein Studies, v. 6. Boston: Birkhäuser, 1995, p. 67-90.
- HOFMAN, W. *Kritische Beleuchtung der beiden Grundbegriffe der Mechanik*. Viena: Kuppitsche Wwe., 1904. Tradução parcial para o inglês: Motion and inertia, trad. J.B. Barbour. In: BARBOUR, J.B. & PFISTER, H. (orgs.). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Einstein Studies, v. 6. Boston: Birkhäuser, 1995, p. 128-33.
- MACH, E. *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1883. Tradução para o inglês: *The science of mechanics - a critical and historical account of its development*. La Salle: Open Court, 1960.

- MASHHOON, B., HEHL, F.H., & THEISS, D.S. On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers. *General Relativity and Gravitation*, v. 16, 1984, p. 711-50.
- MEHRA, J. Erwin Schrödinger and the rise of wave mechanics. II. The creation of wave mechanics. *Foundations of Physics*, v. 17, 1987, p. 1141-88.
- MEHRA, J. & RECHENBERG, H. *The Historical Development of Quantum Theory*. V. 5: *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics*. Nova Iorque: Springer, 1987.
- MOORE, W. *Schrödinger – Life and Thought*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londres: S. Pepys, 1687. Tradução para o inglês: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, in *Great Books of the Western World*, v. 372. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952, p. 1-372. Tradução para o português: *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, v. 1. Tradução de T. Ricci, L.G. Brunet, S.T. Gehring e M.H.C. Célia. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990.
- PAIS, A. 'Subtle is the lord...' - the science and the life of Albert Einstein. Oxford: Oxford University Press, 1982. Tradução para o português: *Sutil é o senhor... – a ciência e a vida de Albert Einstein*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.
- PATY, M. *Einstein philosophe*. Paris: Presses Universitaires de France, 1993.
- PAULI, W. Relativitätstheorie. In: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, v. V19. Leipzig: B.G. Teubner, 1921. Tradução para o inglês: *Theory of Relativity*. Londres: Pergamon, 1958.
- RAINE, D.J. Mach's principle and space-time structure. *Reports on Progress in Physics*, v. 44, 1981, p. 1151-95.

- RAMAN, V.V. & FORMAN, P. Why was it Schrödinger who developed de Broglie's ideas? *Historical Studies in the Physical Sciences*, v. 1, 1969, p. 291-314.
- REINHARDT, M. Mach's principle – a critical review. *Zeitschritte fur Naturforschung A*, v. 28, 1973, p. 529-37.
- REISSNER, H. Über die Relativität der Beschleunigungen in der Mechanik. *Physikalische Zeitschrift*, v. 15, 1914, p. 371-5. Tradução para o inglês: On the relativity of accelerations in mechanics, trad. J.B. Barbour. In: BARBOUR, J.B. & PFISTER, H. (orgs.). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Einstein Studies, v. 6. Boston: Birkhäuser, 1995, p. 134-42.
- . Über eine Möglichkeit die Gravitation als unmittelbare folge der Relativität der Trägheit abzuleiten. *Physikalische Zeitschrift*, v. 16, 1915, p. 179-85.
- SCHRÖDINGER, E. Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik. *Annalen der Physik*, v. 77, 1925, p. 325-36. Tradução para o inglês: The possibility of fulfillment of the relativity requirement in classical mechanics. Trad. de J.B. Barbour. In BARBOUR, J.B. & PFISTER, H. (orgs.), *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Boston: Birkhäuser, 1995, p. 147-58. Tradução para o português: O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica. Trad. de Xavier Jr., A.L. In Xavier Jr., A.L. & Assis, A.K.T. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 12, 1994, p. 3-18.
- . *Expanding Universes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
- . *Collected Papers*, v. 2. Viena: Austrian Academy of Sciences, 1984.
- SCIAMA, D.W. On the origin of inertia. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 113, 1953, p. 34-42.
- WEBER, W. Elektrodynamische Maassbestimmungen über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. In: *Abhandlungen bei Begründung der*
- Cad. Hist. Fil. Ci.*, Campinas, Série 3, v. 11, n. 2, p. 131-152, jul.-dez. 2001.

*Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizens's*. Leipzig: Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft, 1846, p. 211-378. Reimpresso in: WEBER, W. *Werke*, v. 3. Berlin: Springer, 1893, p. 25-214.

———. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik*, v. 73, 1848, p. 193-240. Tradução para o inglês: On the measurement of electro-dynamic forces. In: R. Taylor (org.). *Scientific Memoirs*, v. 5. Nova Iorque: Johnson Reprint Corporation, 1966, p. 489-529.

WESSELS, L. Schrödinger's route to wave mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science*, v. 10, 1979, p. 311-40.

WEYL, H. *Raum-Zeit-Materie*. Berlin: J. Springer, 1918. 4<sup>a</sup> ed.: 1921. Tradução para o inglês da 4<sup>a</sup> ed.: *Space, Time, Matter*. Londres: Methuen, 1922. Nova Iorque: Dover, 1952.

———. Massenträgheit und Kosmos: ein Dialog. *Die Naturwissenschaften*, v. 12, 1924, p. 197-204.

WILL, C.M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics. Revised Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

XAVIER JR., A.L. & ASSIS, A.K.T. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica – uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 12, 1994, p. 3-18.

———. Schrödinger, Reissner, Weber e o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, v. 17, 1997, p. 103-6.